Αλγεβρικές Δομές

13/04/16

Αβελιανές πεπερασμένες ομάδες:

$2 \le |G| < \infty$ αβελιανή

$|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$

p_i πρώτοι διαφορετικοί, $0 < n_i$ φυσικοί.

π.χ: $|G| = 6$ αβελιανή;

1) $G \cong \mathbb{Z}_6 \cong$
2) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

π.χ: $|G| = 8 = 2^3$ αβελιανή; $3 \to 3 = 1+2 = 1+1+1$

$\{0, \square, +\} = \{0,\square\} \sqcup \{+\}$, $\{0\} \sqcup \{\square\} \sqcup \{+\}$

1) $G \cong \mathbb{Z}_8$
2) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2}$
3) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(όμως η $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι ισόμορφη με τη $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).

Ορισμός:
Μία διαμέριση ενός φυσικού n είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $1 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k$ ώστε $n = t_1 + t_2 + \cdots + t_k$.

π.χ:
1 διαμέριση 1
2 διαμέριση 2, $1+1$
3 >> 3, $2+1$, $1+1+1$
4 >> 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$

Θεωρία:
Το πλήθος των διαμερίσεων n θα συμβολίζεται με $\pi(n)$

π.χ:
$\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 3$, $\pi(4) = 5$, ...

No. Date

Θεωρία:

Αν έχουμε δυο φυσικούς n και m και ζητήσουμε το πλήθος των διαμερίσεων $1 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_k \le n$ και $1 \le s_1 \le s_2 \le \dots \le s_\ell \le m$ με $t_1 + t_2 + \dots + t_k = n$ και $s_1 + s_2 + \dots + s_\ell = m$

Θα είναι: $\Pi(n) \cdot \Pi(m)$

Θεωρία:

Το προηγούμενο γενικεύεται για περισσότερους φυσικούς $n_1, n_2, \dots, n_k$

Το πλήθος των διαμερίσεων σε αυτήν την περίπτωση είναι $\Pi(n_1) \cdot \Pi(n_2) \cdot \dots \cdot \Pi(n_k)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Χωρίς απόδειξη)

Πεπερασμένες αβελιανές ομάδες:

Έστω G αβελιανή με $2 \le |G| \le p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ με p_i πρώτοι διαφορετικοί και n_i φυσικοί μη-μηδενικοί. Το πλήθος των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων τάξης $p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ δίνεται από το γινόμενο $\Pi(n_1) \cdot \Pi(n_2) \cdot \dots \cdot \Pi(n_k)$

- Αυτές οι ομάδες έχουν μορφή:

$$\mathbb{Z}/p_1^{t_{11}} \times \mathbb{Z}/p_1^{t_{12}} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_1^{t_{1k_1}} \times \mathbb{Z}/p_2^{t_{21}} \times \dots$$

$$\dots \times \mathbb{Z}/p_2^{t_{2k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{t_{k1}} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{t_{kk_k}}$$

Όπου $t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{ik_i} = n_i$

όπου $1 \le t_{i1} \le t_{i2} \le \dots \le t_{ik_i} \le n_i$

με $i = 1, \dots, k$

No. Date

<u>Π.χ</u>: Βρες όλες τις μη ισόμορφες ομάδες 36

$|G| = 36 = 2.18 = 2^2.9 = 2^2.3^2$

$k=2,\ p_1 = 2,\ p_2 = 3$

$n_1 = 2 = n_2$

Το πλήθος είναι $\pi(2) \cdot \pi(2) = 2.2 = 4$

Να τις βρούμε: $2,\ 1+1,\ 2,\ 1+1$

Άρα $\mathbb{Z}_{p_1^2} \times \mathbb{Z}_{p_2^2} = \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2}$

γινόμενο κυκλικών με τάξεις πρώτες μεταξύ τους $\cong \mathbb{Z}_{36}$

<u>$2^{η}$ διαμέριση</u>: $2,\ 1+1$

$\mathbb{Z}_{p_1^2} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_2} = \underbrace{\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3} \times \mathbb{Z}_3$

$= \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3$

<u>$3^{η}$ διαμέριση</u>: $1+1,\ 2$

$\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2^2} = \mathbb{Z}_2 \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3^2}}$

$= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$

<u>$4^{η}$ διαμέριση</u>: $1+1,\ 1+1$

$\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_2} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \cong$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$

Π.χ.:
Να βρεθούν οι μη-ισόμορφες αβελιανές τάξης 60.

$|G| = 60 = 2\cdot 30 = 2^2\cdot 15 = 2^2\cdot 3\cdot 5$

$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5$

$n_1 = 2,\ n_2 = 1,\ n_3 = 1$

Πλήθος $\pi(n_1)\pi(n_2)\pi(n_3) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$

Διαμερίσεις: 2: 2,1,1 και 1+1,1,1

2,1,1 $\mathbb{Z}/p_1^2 \times \mathbb{Z}/p_2 \times \mathbb{Z}/p_3 = \mathbb{Z}/2^2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 \cong$

$\cong \mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/15 \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/20 \cong \mathbb{Z}/60$

1+1,1,1, $\mathbb{Z}/p_1 \times \mathbb{Z}/p_1 \times \mathbb{Z}/p_2 \times \mathbb{Z}/p_4 =$

$= \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/5$

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/15 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/10 \cong$

$\cong \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/10 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/30$

(για να τις ενώσουμε πρέπει να είναι πρώτα μεταξύ τους).

Θεωρία Δακτυλίων:
(Rings)

1) $(\mathbb{Z}, +)$ αβελιανή Ομάδα
2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$
3) Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα η οποία συνδέει τις δύο πράξεις:
$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Όταν ένα σύνολο έχει αυτές τις ιδιότητες θα το ονομάζω μοναδιαίο δακτύλιο

Π.Χ: 1) $(2\mathbb{Z}, +)$ ομάδα αβελιανή
2) $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ ημιομάδα
3) Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα

όταν ένα σύνολο έχει αυτές τις ιδιότητες θα το ονομάζω δακτύλιο

Π.Χ: 1) $(\mathbb{Q}, +)$ αβελιανή ομάδα
2) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ αβελιανή ομάδα
3) Ισχύει και η επιμεριστική ιδιότητα

όταν ένα σύνολο έχει αυτές τις ιδιότητες λέγεται σώμα

Ορισμός:
Ένα σύνολο R εφοδιασμένο με δύο πράξεις $(R, +, \cdot)$ θα καλείται δακτύλιος αν ισχύουν:
1) $(R, +)$ αβελιανή ομάδα

2) $(R, \cdot)$ ημιομάδα
3) Ισχύει η επιμεριστική
$r_1(r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$
4) Αν επιπλέον ο "πολ/μος" είναι αντιμεταθετικός θα καλείται αντιμεταθετικός δακτύλιος (1)+2)+3)+4))

5) Αν επιπλέον υπάρχει μοναδιαίο 1_R με $r \cdot 1_R = 1_R \cdot r = r \ \forall r \in R$ τότε θα καλείται μοναδιαίος δακτύλιος (1)+2)+3)+5))

6) Αν επιπλέον (1)+2)+3)+5)+6)) $\forall r \in R$ $\exists r^*$ με $r \cdot r^* = r^* \cdot r = 1_R$ τότε θα καλείται διαιρετικός δακτύλιος
7) Αν ισχύουν όλα τα προηγούμενα θα καλείται σώμα (field)

Π.Χ : 1) $2\mathbb{Z}$ αντιμεταθετικός

2) $\mathbb{Z}$ αντιμεταθετικός μοναδιαίος
3) $M(n\times n, \mathbb{R})$ μοναδιαίος.
4) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ σώματα.

Π.Χ :

5) $R = \{a+b\sqrt{2}, a,b \in \mathbb{Q}\}$ με την πρόσθεση και τον πολ/μό. από το $\mathbb{R}$ με $R \subsetneq \mathbb{R}$. Είναι αυτό δακτύλιος;

Λύση :

1) $(\mathbb{R}, +)$ αβελιανή ομάδα
$(a+b\sqrt{2}) + (a'+b'\sqrt{2}) = (a+a') + (b+b')\sqrt{2}$
άρα είναι προσεταιριστική η πράξη. (και κλειστή)

2) $(R, \cdot)$ ημιομάδα, αντιμεταθετικό μονοειδές.
$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab'+a'b)\sqrt{2}$
Άρα η πράξη είναι κλειστή άρα είναι προσεταιριστική. από το $\mathbb{R}$.
$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in R$ και $1(a+b\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2}$
Αντίστροφος ;;;

$(a+b\sqrt{2})^{-1} = ;;;$
πρέπει για να υπάρχει να ισχύει $a^2+b^2 > 0$
$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = 1 \iff$
$\iff aa' + 2bb' + (ab'+a'b)\sqrt{2} = 1$
Θα πρέπει $aa'+2bb' = 1$ (++) και $ab'+a'b = 0$ (+)
Αν $b=0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{Q} \subseteq R$
Αν $b \neq 0 \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{ab'}{b} = \frac{a'\cancel{b}}{\cancel{b}} \Rightarrow a' = \frac{ab'}{b}$

και έχουμε (++) σύστημα για a' και b'